

ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ ОПЫТА

- Запись колебаний, когда они происходят в фазе, и определение периода T_+ .
- Запись колебаний, когда они происходят в противофазе, и определение периода T_- .
- Запись связанных колебаний и определение периода колебаний T и периода биения T_Δ .
- Сравнение полученных значений с рассчитанными для собственных периодов T_+ и T_- .

ЦЕЛЬ ОПЫТА

Запись и оценка колебаний двух одинаковых связанных маятников

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ

Колебания двух одинаковых связанных маятников отличаются периодом колебаний и периодом биения. Период биения - это интервал между двумя моментами времени, когда один маятник отклоняется на свою максимальную амплитуду. Обе величины можно рассчитать по собственным периодам колебаний связанных маятников, когда колебания происходят в фазе и в противофазе.

НЕОБХОДИМОЕ ОБОРУДОВАНИЕ

Кол-во	Наименование	№ по каталогу
2	Стержневой маятник с датчиком угла (230 В, 50/60 Гц)	U8404275-230 или U8404275-115
1	Цилиндрические пружины с жесткостью 3,0 Н/м	U15027
2	Настольные зажимы	U13260
2	Стойка из нержавеющей стали длиной 1000 мм	U15004
1	Стойка из нержавеющей стали длиной 470 мм	U15002
4	Универсальный зажим	U13255
2	Высокочастотный соединительный шнур, байонетный разъем/4-мм штекер	U11257
1	Прибор 3B NETlog™ (230 В, 50/60 Гц)	U11300-230 или U11300-115
1	Прибор 3B NETlog™ (115 В, 50/60 Гц)	U11310
1	Программное обеспечение 3B NETlab™	U11310



ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ

В случае колебаний двух связанных маятников энергия колебания передается от одного маятника к другому и обратно. Если оба маятника одинаковы и колебание начинается так, что один маятник изначально находится в покое, а другой - в отклоненном положении, фактически происходит передача всей энергии целиком, т.е. один маятник всегда приходит в исходную точку, соответствующую состоянию покоя, а другой при этом отклоняется на максимальную амплитуду. Время между двумя такими состояниями, когда один маятник находится в положении покоя, или, в более общем случае, время между любыми двумя моментами отклонения маятника на минимальную амплитуду называется периодом биения T_Δ .

Колебания двух одинаковых связанных идеальных маятников можно рассматривать как суперпозицию двух собственных колебаний. Эти собственные колебания можно наблюдать, когда оба маятника колеблются полностью в фазе или полностью в противофазе. В первом случае оба маятника колеблются с той частотой, с которой они колебались бы, если бы никакой связи с другим маятником вообще не было. Во втором случае эффект связи максимален, и собственная частота выше. Все другие колебания можно описать с помощью суперпозиции этих двух собственных колебаний.

Уравнение движения маятника принимает вид:

$$(1) \quad \begin{aligned} L \cdot \varphi_1 + g \cdot \varphi_1 + k \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \\ L \cdot \varphi_2 + g \cdot \varphi_2 + k \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) &= 0 \end{aligned}$$

g : ускорение, возникающее под действием силы тяжести, L : длина маятника, k : постоянная связи

В случае вариантов движения $\varphi_- = \varphi_1 - \varphi_2$ и $\varphi_+ = \varphi_1 + \varphi_2$ (изначально выбранных произвольно) уравнение движения выглядит следующим образом:

$$(2) \quad \begin{aligned} L \cdot \varphi_+ + g \cdot \varphi_+ &= 0 \\ L \cdot \varphi_- + (g + 2k) \cdot \varphi_- &= 0 \end{aligned}$$

Решения

$$(3) \quad \begin{aligned} \varphi_+ &= a_+ \cdot \cos(\omega_+ t) + b_+ \cdot \sin(\omega_+ t) \\ \varphi_- &= a_- \cdot \cos(\omega_- t) + b_- \cdot \sin(\omega_- t) \end{aligned}$$

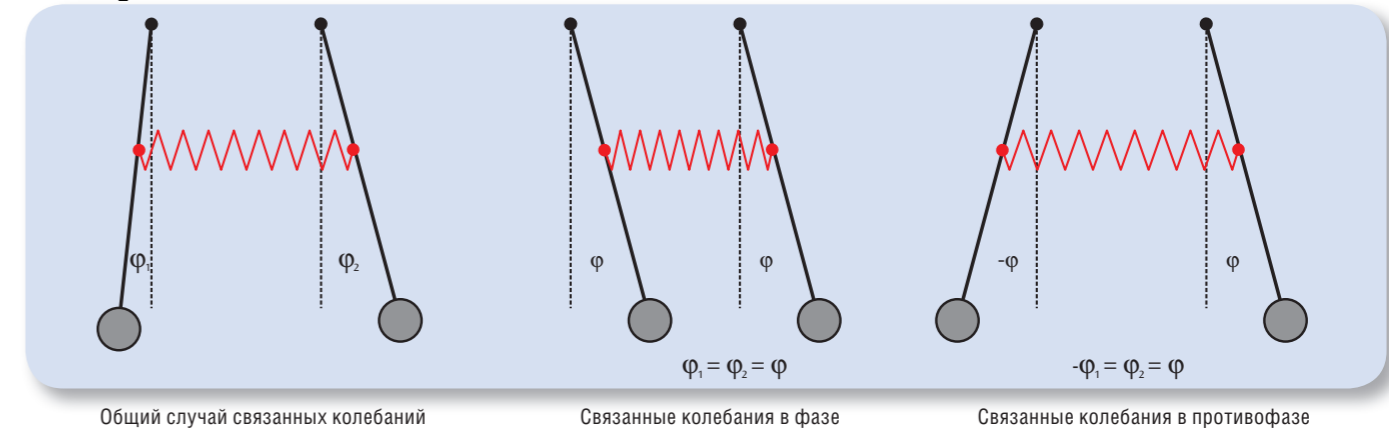
дают увеличение угловых частот

$$(4) \quad \begin{aligned} \omega_+ &= \sqrt{\frac{g}{L}} \\ \omega_- &= \sqrt{\frac{g + 2k}{L}} \end{aligned}$$

соответствующее собственным частотам при движении в фазе или в противофазе ($\varphi_- = 0$ в случае движения в противофазе и $\varphi_+ = 0$ в случае движения в фазе).

Отклонение маятников можно рассчитать по сумме или разности двух движений, приводящих к решениям

$$(5) \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2} \cdot (a_+ \cdot \cos(\omega_+ t) + b_+ \cdot \sin(\omega_+ t) + a_- \cdot \cos(\omega_- t) + b_- \cdot \sin(\omega_- t)) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2} \cdot (a_+ \cdot \cos(\omega_+ t) + b_+ \cdot \sin(\omega_+ t) - a_- \cdot \cos(\omega_- t) - b_- \cdot \sin(\omega_- t)) \end{aligned}$$



Параметры a_+ , a_- , b_+ и b_- являются произвольными коэффициентами, которые можно рассчитать по начальным состояниям двух маятников в момент времени $t = 0$.

Проще всего рассмотреть следующий случай, когда маятник 1 движется в момент времени 0 из положения покоя с начальной угловой скоростью ψ_0 , а маятник 2 остается в положении покоя.

$$(6) \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\psi_0}{\omega_+} \cdot \sin(\omega_+ t) + \frac{\psi_0}{\omega_-} \cdot \sin(\omega_- t) \right) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\psi_0}{\omega_+} \cdot \sin(\omega_+ t) - \frac{\psi_0}{\omega_-} \cdot \sin(\omega_- t) \right) \end{aligned}$$

Тогда скорость обоих маятников определяется выражениями:

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \frac{\psi_0}{2} \cdot (\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t)) \\ \dot{\varphi}_2 &= \frac{\psi_0}{2} \cdot (\cos(\omega_+ t) - \cos(\omega_- t)) \end{aligned}$$

которые можно преобразовать, чтобы получить

$$(8) \quad \begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \psi_0 \cdot \cos(\omega_\Delta t) \cdot \cos(\omega t) \\ \dot{\varphi}_2 &= \psi_0 \cdot \sin(\omega_\Delta t) \cdot \cos(\omega t) \end{aligned} \quad \text{где (9) } \begin{aligned} \omega_\Delta &= \frac{\omega_- - \omega_+}{2} \\ \omega &= \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} \end{aligned}$$

Это соответствует колебаниям обоих маятников с одинаковой угловой частотой ω , где амплитуды скоростей $\dot{\varphi}_1$ и $\dot{\varphi}_2$ модулируются угловой частотой ω_Δ :

$$(10) \quad \begin{aligned} \psi_1(t) &= \psi_0 \cdot \cos(\omega_\Delta t) \\ \psi_2(t) &= \psi_0 \cdot \sin(\omega_\Delta t) \end{aligned}$$

ОЦЕНОЧНЫЙ РАСЧЕТ

Уравнение (4) можно использовать для расчета собственных периодов колебаний T_+ и T_- при колебаниях в фазе и в противофазе:

$$T_+ = \frac{2\pi}{\omega_+} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{и} \quad T_- = \frac{2\pi}{\omega_-} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g + 2k}}$$

Из уравнения (9) период T связанных колебаний выражается следующим образом:

$$\frac{2\pi}{T} = \omega = \frac{\pi}{T_+} + \frac{\pi}{T_-} \quad \text{и следовательно, } T = 2 \cdot \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ + T_-}$$

Амплитудная модуляция, определяемая уравнением (10), обычно описывается своим периодом T_Δ , соответствующим интервалу между следующими один за другим моментами времени, когда один из маятников останавливается:

$$\frac{2\pi}{2T_\Delta} = \omega_\Delta = \frac{\pi}{T_-} - \frac{\pi}{T_+} \quad \text{и следовательно, } T_\Delta = \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-}$$